



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve în \mathbb{N}^* ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{101} + 9).$$

2. Se consideră $x_1, x_2, \dots, x_{2015} \in \mathbb{Z}$, astfel încât
 $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2015} = 2$. Se notează cu:

$S = x_1 + x_2 + \dots + x_{2015}$, iar cu

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(x_{2015} + \frac{1}{x_1}\right).$$

- a) Să se arate că S este un număr întreg divizibil cu 2 sau cu 4.
b) Calculați produsul P .

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N situate pe latura (CD) , respectiv (AB) . Demonstrați că: $\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CND} = \mathcal{A}_{ABCD}$.

4. Fie pătratul $ABCD$. Pe latura AB se construiește în exterior triunghiul echilateral ABE . Perpendiculara din A pe dreapta DE intersectează perpendiculara din B pe dreapta CE în punctul F . Arătați că patrulaterul $BEFC$ este romb.

Notă

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).
- Timp de lucru: 3 ore

Soluții clasa a VII-a:

1. Se folosește formula radicalilor dubli:

$$\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}} = \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}, \quad k = \overline{1, n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})}{2}.$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1^2 - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2^2 - 1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sqrt{2} - \sqrt{0}) + (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})] = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Dar } S &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{101} + 9) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{101} + 9) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{101} + 10 \Rightarrow n = 100. \end{aligned}$$

2. Din $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2015} = 2$ și $x_1, x_2, \dots, x_{2015} \in \mathbb{Z}$ se deduce faptul că un număr, fie acesta $x_{2015} = \pm 2$, iar celelalte numere sunt 1 sau (-1). În total sunt 2014 numere care iau valorile 1, respectiv (-1).

a) Cazul I, $x_{2015} = 2$

Numerele 1, respectiv (-1) sunt în număr par. Se notează cu

m ($m = 2k, k = \overline{0, 1007}$) totalul numerelor de 1 din șir, iar cu n ($n = 2p, p = \overline{0, 1007}$) totalul numerelor de (-1) din șir, $m + n = 2014$. Atunci:

$$S = m \cdot 1 + n \cdot (-1) + 2 = 2014 - 2 \cdot n + 2 = (2016 - 4p) : 4.$$

Cazul II, $x_{2015} = -2$

Numerul 1, respective (-1) sunt în număr impar. Se notează cu: m ($m = 2k + 1, k = \overline{0, 1006}$) totalul numerelor de 1 din șir, iar cu n ($n = 2p + 1, k = \overline{0, 1006}$) totalul numerelor de (-1) din șir, $m + n = 2014$.

($k + p = 1006$). Atunci:

$$\begin{aligned} S &= m \cdot 1 + n \cdot (-1) + 2 = 2014 - 2 \cdot n - 2 = \\ &= 2012 - 2(2p + 1) = (2010 - 4p) : 2. \end{aligned}$$

b) Cazul I, $x_{2015} = 2$

1. Dacă toate numerele sunt 1, atunci:

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(x_{2014} + \frac{1}{x_{2015}}\right) \cdot \left(x_{2015} + \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de } 2013 \text{ ori}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (2 + 1) = 9 \cdot 2^{2012};$$

2. Dacă toate numerele sunt (-1) , atunci:

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(x_{2014} + \frac{1}{x_{2015}}\right) \cdot \left(x_{2015} + \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2)}_{\text{de } 2013 \text{ ori}} \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - 1) = -2^{2013} \left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{2012}.$$

3. Dacă în șir sunt și numere de 1, și numere de (-1) , atunci paranteza formată dintr-un 1 și un (-1) este 0, deci produsul va fi 0.

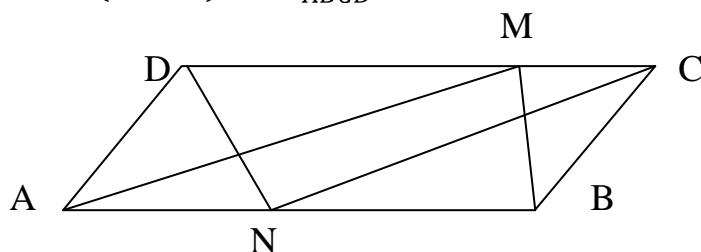
Cazul II, $x_{2015} = -2$

Numele 1, respective (-1) sunt în număr impar, deci cel puțin o paranteză este zero, adică este de forma: $(1-1)$ sau $(-1+1)$. În acest caz $P = 0$.

3. Deoarece $AB = DC$, iar $d(D, AB) = d(M, AB) = d(N, CD)$,

$$\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CND} = \frac{AB \cdot d(M, AB)}{2} + \frac{CD \cdot d(N, CD)}{2} = 2 \cdot \frac{AB \cdot d(M, AB)}{2} =$$

$$= AB \cdot d(M, AB) = \mathcal{A}_{ABCD}.$$



$$4. m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CBA}) + m(\widehat{ABE}) \Rightarrow m(\widehat{EBC}) = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

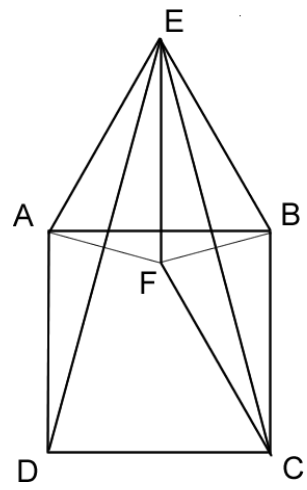
Dar $\triangle EBC$ isoscel ($(BE) \equiv (BC)$) și BF este înălțime în $\triangle EBC \Rightarrow$
 $(BF \text{ bisectoarea } \sphericalangle EBC \Rightarrow m(\widehat{EBF}) = 75^\circ \Rightarrow m(\widehat{ABF}) = 75^\circ - 60^\circ =$
 $= 15^\circ.$

Analog $m(\widehat{FAB}) = 15^\circ \Rightarrow \triangle FAB$ isoscel $\Rightarrow (FA) \equiv (FB)$. Dar $(EA) \equiv$
 (EB)

$\Rightarrow EF$ mediatoarea segmentului $[AB]$.

$\Rightarrow EF \perp AB$. Dar $CB \perp AB \Rightarrow EF \parallel BC$ (1).

Dar $\triangle EAB$ echilateral $\Rightarrow (EF \text{ este bisectoarea } \sphericalangle AEB \Rightarrow m(\widehat{FEB}) = 30^\circ,$
dar $m(\widehat{BEC}) = 15^\circ \Rightarrow m(\widehat{FEC}) = 15^\circ \Rightarrow \triangle EFB$ isoscel deoarece $(EC$
bisectoare și înălțime. $\Rightarrow (EF) \equiv (EB)$. Dar $(EB) \equiv (BC) \Rightarrow (EF) \equiv (BC)$
(2). Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow BEFC$ paralelogram. Dar $(BE) \equiv (BC) \Rightarrow$
 $BEFC$ romb.



Barem de corectare

Clasa a VII-a

Problema 1	Oficiu	1 p
a) Aplicarea formulei radicalilor dubli		2p
$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})}{2}$		3p
$s = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})$		2p
Rezolvarea ecuației		2p
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
$x_{2015} = \pm 2$, 2014 numere iau valorile 1, respectiv (-1).		1 p
a) Cazul I, $x_{2015} = 2$		2p
$S = m \cdot 1 + n \cdot (-1) + 2 = 2014 - 2 \cdot n + 2 =$ $= (2016 - 4p) : 4$		
Cazul II, $x_{2015} = -2$		2p
$S = m \cdot 1 + n \cdot (-1) + 2 = 2014 - 2 \cdot n - 2 =$ $= 2012 - 2(2p + 1) = (2010 - 4p) : 2$		
a) Cazul I, $x_{2015} = 2$		
1. Dacă toate numerele sunt 1		1p
$P = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de 2013 ori}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (2 + 1) = 9 \cdot 2^{2012}$		
2. Dacă toate numerele sunt (-1)		1p
$P = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2)}_{\text{de 2013 ori}} \cdot \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - 1) =$ $= -2^{2013} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{2012}$		
3. Dacă în șir sunt și numere de 1, și numere de (-1), atunci paranteza formată dintr-un 1 și un (-1) este 0, P= 0.		1p
Cazul II, $x_{2015} = -2$		1p
TOTAL		10p

Problema 3	Oficiu 1p
Figura	2 p
$d(D, AB) = d(M, AB) = d(N, CD),$	2p
$\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CND} = \frac{AB \cdot d(M, AB)}{2} + \frac{CD \cdot d(N, CD)}{2}$	2p
Finalizare	3p
TOTAL	10p

Problema 4	Oficiu 1 p
$m(\widehat{ABF}) = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$	1p
$m(\widehat{FAB}) = 15^\circ$	1p
EF mediatoarea segmentului $[AB]$	2p
$EF \parallel BC$	1p
$\triangle EFB$ isoscel deoarece (EC) bisectoare și înălțime	1p
$(EF) \equiv (EB)$. Dar $(EB) \equiv (BC) \Rightarrow (EF) \equiv (BC)$	1p
$BEFC$ paralelogram. $(BE) \equiv (BC)$	1p
Finalizare: $BEFC$ romb.	1p
TOTAL	10p